Systèmes Linéaires invariants 1
Examen de Travaux Pratiques (durée 2h)

Sauf indication contraire, réaliser le maximum de calculs sous Matlab, mais rédiger les analyses et commentaires sur la copie. ***Imprimer*** *le script Matlab en fin de séance, exercices séparés par des commentaires. Imprimer aussi les schémas Simulink ainsi que les résultats de simulation nécessaires, analysés et commentés lorsqu'une question le demande.*

EXERCICE 1 Linéarisation et analyse de commandabilité

On considère le système non-linéaire défini par le modèle d'état suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & {X_1}^2 - 1 \\ \dot{X}_2 & = & X_2 + X_1 + U \\ \dot{X}_3 & = & 2X_3 + X_2 \sin(X_1 \pi/2) \\ Y & = & X_1 + X_3 \end{array}\right.$$

Question 1.1

Calculer (sans Matlab) les points d'équilibre du modèle pour l'entrée constante $U = U_0 = 1$.

Question 1.2

Linéariser (sans Matlab) le modèle autour du point d'équilibre ayant $X_{1,0} = -1$. Saisir ce modèle sur Matlab.

Question 1.3

Mettre le système sous forme modale et vérifier que la fonction de transfert est bien identique.

Question 1.4

Analyser les modes commandables. Conclure sur la possibilité de stabiliser asymptotiquement le système non-linéaire par un retour d'état.

EXERCICE 2 Mise sous forme compagne

On considère la représentation d'état $\left\{\begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{array}\right.$ avec

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Question 2.1

Analyser la stabilité, la commandabilité et l'observabilité.

Question 2.2

Quelle est la fonction de transfert F associée?

Question 2.3

Sans calculer de matrice de passage, saisir une réalisation sous forme compagne de commande et vérifier que la fonction de transfert associée F_c est identique à F.

Question 2.4

Sans calculer de matrice de passage, saisir une réalisation sous forme compagne d'observation et vérifier que la fonction de transfert associée F_o est identique à F.

EXERCICE 3 Analyses de stabilité

On considère la représentation d'état $\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{array} \right.$ avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Question 3.1

Quels sont les valeurs propres de A ? Quels sont les modes ?

Question 3.2

Quelle sera la réponse à des conditions initiales du modèle autonome $\dot{X}(t) = AX(t)$?

Question 3.3

Le modèle est-il instable ? Est-il asymptotiquement stable ?

Question 3.4

Expliquer comment trouver des matrices B, C et D telles que le modèle soit stable entrée bornée / sortie bornée. Donner un exemple et le vérifier.

EXERCICE 4 Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

On considère la représentation d'état $\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{array} \right.$ avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Question 4.1

Analyser la stabilité et la commandabilité et conclure sur les possibilités d'un retour d'état.

Question 4.2

Synthétiser un retour d'état plaçant les valeurs propres de la boucle fermée en $-5, -3-9j, -3+9j$.

Question 4.3

Effectuer le câblage du système bouclé autonome sous Simulink. Vérifier si la dynamique obtenue est cohérente sur quelques réponses à des conditions initiales. **Imprimer**.

On souhaite à présent réaliser un asservissement de la grandeur $Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ à une consigne Z^*.

Question 4.4

Proposer une modification de la loi de commande permettant d'obtenir un asservissement de gain statique unitaire.

Question 4.5

Effectuer le câblage de l'asservissement sous Simulink et vérifier la qualité de la loi de commande. **Imprimer**.